力学与数理融合——浅谈相似性解方法[1)]

黄云帆　王沫然[2)]

(清华大学工程力学系，北京 100084)

摘要　基于教学实践，针对半无穷大空间 Stokes 第一问题，讨论了相似性解方法与微分代数领域之间的联系。阐明了初边值条件与微分方程的李群无穷小对称性相容是相似性解存在的必要条件，并首次给出了相似性解方法能使偏微分方程化为常微分方程的严格证明。本文旨在展现热-流科学相关课程引入现代数理观点的必要性，引导学生关注各类近似方法背后的物理思想，提升学生把握核心物理图像、构建合理数学语言和建模求解具体问题的能力。

关键词　相似性解，李群，Stokes 第一问题，无穷小对称，群不变解

中图分类号: O302, O303　　**文献标识码**: A　　doi: 10.6052/1000-0879-23-676

MERGING OF MECHANICS AND MATHEMATICAL PHYSICS—A BRIEF DISCUSSION ON SIMILARITY METHOD[1)]

HUANG Yunfan　WANG Moran[2)]

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract　Originated from the teaching practice with the Stokes first problem in a semi-infinite space, the applicability and principle of the similarity method are discussed. This paper points out the necessary conditions for the existence of similarity solutions, that is, the initial and boundary conditions need to be compatible with the Lie symmetry of the differential equations. Moreover, the mathematical language of Lie-group method is utilized to prove why the similarity method can transform partial differential equations to the ordinary ones for the first time, as far as we know. Through discussion of the connection between the similarity method and Lie group in differential algebra, this article aims to demonstrate the necessity of introducing the perspectives of modern mathematical physics into courses such as fluid mechanics and heat transfer, thereby promoting the teaching practice to actively guide the students to pay attention to the physical ideas behind various methods to get the approximate solution, and to improve their ability to grasp the physical nature of problems and solve specific problems by physical modeling with appropriate mathematical language.

Keywords　similarity method, Lie group, Stokes first problem, infinitesimal symmetry, group-invariant solution

流动、传热和传质等传递过程中的经典连续介质力学与数学物理方法之间的紧密联系由来已久。1822 年，著名物理学家和数学家傅里叶（B.J. Fourier）出版了专著《热的解析理论》，奠定了其作为传热学奠基人的历史地位。该书中提出的数学理论和方法直接促进了求解抛物型方程的谱分解、积分变换等方法的发展，也极大影响了调和分析、泛函分析等纯数学领域的进程。然而，连续介质力学常涉及众多偏微分方程甚至强非线性偏微分方程组的定解问题，其精确解很少。20

2023–12–26 收到第 1 稿，2024–02–17 收到修改稿。

1) 国家自然科学基金项目（12272207）资助。

2) 王沫然，博士，教授，研究方向为微纳尺度流动和传热。E-mail: mrwang@tsinghua.edu.cn

引用格式: 黄云帆, 王沫然. 力学与数理融合——浅谈相似性解方法. 力学与实践, 2024, 46(4): 868-875

Huang Yunfan, Wang Moran. merging of mechanics and mathematical physics—a brief discussion on similarity method. *Mechanics in Engineering*, 2024, 46(4): 868-875

世纪，许多应用数学力学家发展了以摄动法为代表的包括界定函数法、匹配渐近展开法、多尺度方法、合成展开法等在内的多种近似解法，通过把握物理过程的本质因素选取合适的摄动参数，将复杂定解问题简化为可解问题，如钱学森、钱伟长、郭永怀等人均曾应用摄动法解决过流体力学或固体力学领域的经典问题。传热传质学方面，著名流体力学家列维奇（V.G. Levich）曾在 1959 年出版专著《物理化学流体力学》，该书关注传递过程中传热传质与流动的界面耦合问题，系统梳理了各类边界层问题的相似性解方法和渐近分析建模方法，开创性地推动了应用数学领域和热-流-质交叉学科——物理化学流体力学的发展，在微纳尺度界面输运和化学工程等领域获得广泛应用。

笔者在多年“传热学”授课的基础上大胆改革创新，于 2015 年开设“传热学（英）”课程，采用国际最通用的英文教材，中英文混合讲授。课程在传热学基本知识基础上注重探讨传导、对流、辐射等各种传热方式背后的物理机制，特别引导学生关注实际问题中的传热学现象并开展分析-建模-求解-应用，培养学生“从实际中来、到实际中去”的能力。由于多种传热机制相互耦合、系统几何构成与物理约束复杂多变、传热机理常涉及热物理前沿等缘故，基于量纲分析基本定理（即 Π 定理）的理想简化模型与实验关联式等在传热传质学中广为使用。近年来，随着计算机技术的发展和计算能力不断提升，以科学计算为基础的数值方法在传热传质学和流体力学等领域经典输运问题的建模求解中获得了广泛应用，计算流体力学和数值传热学等也逐渐进入了相关本科课程，“传热方程的数值方法”也作为独立一章（3 学时讲授）被纳入了“传热学（英）”的课程内容。

在这一背景下，作为验证数值方法正确性的基础，偏微分方程定解问题理论求解能力的重要性逐渐凸显；与此同时，挖掘精确解或近似解求解方法与结论背后的数学物理意义，也有助于形成物理直观以更好评估数值结果的合理性。实际上，国际国内已有将数学物理方法和流体力学或传热传质学课程有机结合的经验，如美国普林斯顿大学 Howard A. Stone 开设的本科生课程“工程数学 I/II”（Mathematics in Engineering I/II）、美国麻省理工大学 Martin Z. Bazant 开设的本科生慕课课程“输运现象分析”（Analysis of Transport Phenomena）、清华大学工程力学系开设的流体力学系列课程[1-4] 等。在广泛推动依托大类和书院开展本科培养并倡导理工衔接的新工科教育的今天，这种寓理论于实践的教学思路有助于培养工科基础专业学生选取甚至构造合理的数学语言建模求解实际问题的思维与能力。

本文将通过教学实践和答疑过程中关于“相似性解方法”的典型案例，展现热-流-质交叉学科中数理方法尤其是现代数学观点的作用与魅力。著名力学家阿诺尔德曾在其经典教科书中写道，“经典力学中用了许多不同的数学方法和概念，如微分方程和相流、光滑映射和流形、群和代数、辛几何和遍历理论等。许多现代的数学理论都来自力学问题，后来才有了公理化的抽象形式，使它们很难读了[5]。”笔者希望通过本文对相似性解方法与李群李代数之间联系的讨论，展现在流体力学和传热传质学等课程中引入现代数学物理观点的必要性，推动在课程教学中积极引导学生关注各类精确解和近似解方法背后的物理思想，提升其把握核心物理图像、构建合理数学语言和建模求解具体问题的能力。

1　案例概述: 相似性解方法成立的内在原因

相似性解方法通常被认为是量纲分析方法的一种“巧妙”应用，在角点附近势流、零压梯度边界层、瞬态导热和传质等众多问题中有广泛应用[6-9]。主流教科书通常重点强调系统具有“相似性”能够导致其存在相似变量，并使原来的偏微分方程在变量替换后可简化为常微分方程，问题随之得以顺利求解与精确讨论。但在“半无限大空间一维瞬态导热定解问题的相似性解方法”部分的答疑过程中，有学生产生疑惑：“相似性”的具体含义为何？该解法为何能使方程减元？相似性解方法成立有何条件？

该问题具有一般意义。在黏性流体力学中存在与上述瞬态导热数学模型一致的力学场景，即 Stokes 第一问题，其相似性解法在经典教科书中被广为讨论，伸缩变换是表述量纲相关“相似性”

含义的关键；而代表性专著中提到，“李群”这一数学语言是理解相似性解方法的核心工具[1,10-11]。对非线性微分方程的减元简化和内在对称性的寻求，也正是挪威数学家索菲斯·李（Sophus Lie）于 1870 年提出连续变换群方法的重要目的，这种方法也被称为李群或李对称方法[12-13]。该方法既可以简化原始方程并获得精确解，也可以指导构造数值算法，已在约束力学系统[12,14-16]、连续介质力学[13,17-19]、分数阶动力系统[20] 等领域获得了广泛应用。

李群方法作为一种基于对称性的系统方法，不需要特别的变换技巧。该方法可给出微分方程的解集结构，属于微分代数领域；这既继承了抽象代数领域代数方程伽罗瓦理论的思想光辉，又将一般认为只在线性微分动力系统成立的叠加原理拓展到了非线性系统[10]。考虑到一般的非线性微分甚至积分动力系统，既可能应用格林函数方法使控制方程和定解条件的物理约束恢复对称性，也可能通过时空局域化或远场假设等近似方法解除几何约束并恢复初值或边界的局部对称性，这表明对李群方法的讨论具有更广泛的意义[21]。

本文将从黏性流体力学中的 Stokes 第一问题出发，探讨相似性解方法的应用条件，并采用李群语言探讨该方法成立的内在规律。第 2 节关注“相似性”的具体含义及相似性解方法的成立条件；通过分析不同边界条件下相似性解的存在性问题，初步指出相似性解方法利用了微分方程在李群变换下的对称性，该方法要求依赖于其初边值条件与微分方程的李群对称性相容。第 3 节则进一步给出系统“相似性”的数学语言，指出量纲运算本质上是一类特殊的李群变换——伸缩变换，相似性解方法本质上属于李群变换意义下群不变解方法的一种特殊情况。第 4 节基于无穷小生成元的不变量定理，给出了相似性解方法能够使微分方程减元的严格证明，这一点现有教科书均将其仅看作一种数学技巧而并未对其成立背后的数学原理予以充分关注，但这背后的李群方法实际上是求解众多非线性微分方程的利器；在此基础上，本节结合 Riccati 方程、Burgers 方程和线性扩散方程等案例讨论了应用李群方法求解微分方程的一般步骤。第 5 节为结论与展望。

2 应用条件: 方程与边界的对称性相容

黏性流体力学中的 Stokes 第一问题泛指 Couette 流突然启动相关的非定常问题。这里重点对比考察其中的单一无限大平板突然启动和两平行平板间突然发生相对运动两个问题。二者的控制方程可统一写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

式中， u 为流场速度， ν 为运动黏度， x 和 t 分别为空间和时间参数。由量纲分析可构造方程 (1) 的相似变量 $\eta=x^2/(4\nu t)$ 作为新的自变量，从而将其化为常微分方程。

易见上述定解问题的唯一差别在于边界条件的差异。其中，前者的边界条件为

$$u|_{x=0,t>0}=U_0,\ u|_{x\to\infty}=0,\ u|_{t=0}=0 \tag{2}$$

而后者的边界条件则为

$$u|_{x=0,t>0}=U_0,\ u|_{x=d}=0,\ u|_{t=0}=0. \tag{3}$$

容易看出，边界条件式 (2) 可采用单一相似变量 η 表达为 $u|_{\eta=0}=U_0,\ u|_{\eta\to\infty}=0$ ，而边界条件 (3) 的后两个方程则难以采用单一相似变量表达。这直接导致前者可以利用相似性解方法求解，而后者只能寻求级数解、Laplace 变换等方法求解。

实际上，相似变量 η 的选取与如下以 a 为参数的连续非齐次伸缩变换群紧密相关[1]

$$\bar{t}=t\mathrm{e}^{a},\ \bar{x}=x\mathrm{e}^{2a},\ \bar{u}=u \tag{4}$$

容易验证，在群 (4) 作用下：（1）方程 (1) 形式不变，即 $\overline{\partial u/\partial t}=\overline{\partial^2 u/\partial x^2}$ ，具有这样性质的方程称为群的不变方程；（2）相似变量 η （实际上还包括因变量 u ）形式也不变，即 $\bar{\eta}=\eta$ （以及 $\bar{u}=u$ ），具有这样性质的变量称为群不变量；（3）由群不变量构造出的解族 $I(u,\eta)=0$ 及其中满足给定方程的解 $u=f(\eta)$ 形式也不变，即 $I(\bar{u},\bar{\eta})=0$ 且 $\bar{u}=f(\bar{\eta})$ ，具有这样性质的解称为群不变解，也称自相似性解、相似性解。变量、方程在群作用下的形式不变性也称为具有群变换下的对称性。

采用群语言描述，之所以上述两者并非都存在相似性解，原因就在于前者边界条件也具有群

不变性而后者不具有，这一点已有前人文献指出 [18]。应用中常忽略边界条件对称性在相似性解方法中的重要作用，这通常与问题本身求解域的无界性往往能够保持伸缩对称性有关。

3 数学基础: 单参数群与不变量定理

本节将给出单参数群的一般定义和直观解释，阐明群对称性对于求解微分方程的意义，指出相似性解方法属于李群方法中的群不变解方法，进而给出微分方程李群对称性的判别法则——决定方程及其几何意义。这是下节严格证明相似性解方法减元定理的基础。

3.1 单参数群、无穷小生成元与决定方程

群是一个集合，它具有满足封闭性、结合律、单位元、逆元要求的代数结构。与元素个数有限或可数的离散群不同，单参数群是指这样的连续变换群 $T_a(a \geqslant 0)$，它只含一个参数 a，且单位元 T_0 对应于恒等变换，而群乘法 T_bT_a 对应于变换的复合。直观理解，参数 a 可类比为时间参数，单位元则可看作变换在零时刻的初始条件。单参数群还要求 $T_bT_a = T_{a+b}$，这一方面使得单参数群继承了加法的交换性质而成为交换群，另一方面也使其具有了连续性这一拓扑特征（直观上令 $b \to 0$ 即可）；进一步地，当这样的连续变换群还具有微分流形的结构时，便成为著名的李群。

作为单参数群的最简单的例子，设群 $T_a(a \geqslant 0): P(x, y) \mapsto \overline{P}(\overline{x}, \overline{y}, a)$ 为由参数 a 控制的平面变换，其中 $\bar{x} = \varphi(x, y, a)$, $\bar{y} = \psi(x, y, a)$。为保证逆映射的存在性，需要求 $\varphi(x, y, a)$ 与 $\psi(x, y, a)$ 函数无关。欲使单参数群 T_a 成为李群，还需要求函数 φ 和 ψ 具有一定的可微性，这为联系函数形式的代数特征与微分性质提供了可能。关于李群和李代数的严格数学定义，可参考相关专著[12-13]。这里简要讨论引入李群的意义。李群方法之于微分方程正如 Galois 理论之于代数方程，其核心思想类似，即根据方程本身的对称性得出其解所需要满足的对称性（如式 (4)），然后从这些满足对称性的解族（如第 2 节中的 $I(u, \eta) = 0$）中挑选出满足方程的群不变解（如第 2 节中的 $u = f(\eta)$），由此催生的方法称为群不变解方法 [17]。

判断给定函数形式是否具有给定群不变性是应用李群方法的核心步骤。与直接根据定义判断不同[17]，这里寻求一种相比之下更为通用和本质的方法，即单参数群及函数形式的群不变性判据的等价表示——无穷小生成元与决定方程。直观理解，若将单参数群的参数看作时间，则单参数群变换可看作一系列无穷小变换的积分，因此函数形式在单参数群变换下的形式不变性应当与上述无穷小变换紧密相关。这些无穷小变换采用数学语言表达即为无穷小生成元，基于此可定义具有群不变性的函数形式应满足的微分方程，称为决定方程，它直接关联了代数/微分函数的微分特征及其形式不变性，在代数/微分方程与其具有的群对称性之间建立了联系。作为函数形式的群不变性判据，决定方程作用有二：一是给定代数/微分函数形式或方程，得出其在哪些群作用下是形式不变的，即具有怎样的群对称性；二是给定群对称性，确定其对应的代数/微分函数不变量与不变方程。

3.2 不变量定理及其几何意义

本小节将由浅入深，依次给出代数函数和微分函数的无穷小生成元的具体定义，推导相应的决定方程并讨论其几何意义。

3.2.1 简单情形：代数函数的不变量定理

对于 $\mathbb{R}^2$ 上的代数函数 $F(x, y)$，为判断其是否具有在变换群 T_a 作用下的对称性，注意到群单位元对应于恒等变换，故可对变换后的代数式在初始点 (x, y) 处作 Taylor 展开，即

$$
\begin{aligned}
F(\bar{x}, \bar{y}) &= F(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a)) \\
&= F(x + \xi(x, y)a, y + \eta(x, y)a) + o(a) \\
&= \mathrm{e}^{aX} F(x, y) + o(a) \\
&= F(x, y) + aXF(x, y) + \tilde{o}(a)
\end{aligned}
$$

式中，$X = \xi(x, y)\partial/\partial x + \eta(x, y)\partial/\partial y$，这里

$$
\xi(x, y) = \left.\frac{\partial \varphi(x, y, a)}{\partial a}\right|_{a=0}
$$

$$
\eta(x, y) = \left.\frac{\partial \psi(x, y, a)}{\partial a}\right|_{a=0}
$$

由此，$F(\overline{x}, \overline{y}) = F(x, y)$ 的必要条件为

$$
XF = 0 \tag{5}
$$

实际上这一条件也是充分的 [10]。方程 $XF=0$ 被称为群 T_a 的代数函数不变量的决定方程 [10]，上述结论也称为代数函数情形的李群不变量定理，简称不变量定理。

由上述讨论可见，算子 X 兼具代数形式与微分算子特征，完全刻画了代数函数 $F(x,y)$ 在变换群 T_a 作用下的对称性，称为群 T_a 的无穷小生成元，它是构造李群和李代数理论的重要基础。从几何直观的角度理解，变换群给出了在点 (x,y) 处以 a 为参数的参数曲线，无穷小生成元则给出了过 (x,y) 的曲线在 $a=0$ 时的切向量。给定一个代数函数 $F(x,y)$ ，也就相应给出了一条平面曲线 $F(x,y)=0$ ，变换群可以看作是对曲线变形的一种描述。由此可给出不变量定理的几何意义，即曲线上的点在变换后仍位于该曲线上，当且仅当该点变换前后的切向量共线。

3.2.2 一般情形：微分函数的不变量定理

对于 $\mathbb{R}^2$ 上的一阶微分函数 $\tilde{F}(x,y,y'\equiv \mathrm{d}y/\mathrm{d}x)$，为判断其是否具有在变换群 T_a 作用下的对称性，只需类似地考察导数项在变换前后的变化，即

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}}=\frac{D_x(\psi)}{D_x(\varphi)}=\frac{y'+aD_x(\eta)}{1+aD_x(\xi)}=y'+a\zeta_1(x,y)+o(a)$$

其中，延拓公式 $\zeta_1=D_x(\eta)-y'D_x(\xi)=\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-{y'}^2\xi_y$。由此可得无穷小生成元 X 在一阶微分函数 $\tilde{F}(x,y,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)$ 情形下的延拓形式

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta_1\frac{\partial}{\partial y'}$$

这时，不变量的决定方程的形式与式 (5) 类似，即

$$X\tilde{F}=0 \tag{6}$$

方程 $X\tilde{F}=0$ 被称为群 T_a 的微分函数不变量的决定方程，上述结论也被称为一阶微分函数情形的李群不变量定理，又称延拓形式的不变量定理[10]。关于其几何意义，根据相空间选取方式的不同存在两种理解方式。若以 (x,y,y') 所在的 $\mathbb{R}^3$ 为相空间，则与 3.2.1 类似；若以 (x,y) 所在的 $\mathbb{R}^2$ 为相空间，由于微分函数 $\tilde{F}$ 对应于微分方程 $\tilde{F}(x,y,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)=0$ 的一族积分曲线，因此如果微分函数具有在变换群下的对称性，那么对应的积分曲线在变换后仍为原方程的积分曲线。

上述思想与步骤可类比推广至高阶偏微分方程甚至积分方程的情形。为方便后续案例讨论，这里直接给出二阶发展型方程 $u_t=\tilde{G}(t,x,u,u_x,u_{xx})$ 不变量的决定方程。考虑 $\mathbb{R}^3$ 上代数函数 $G(t,x,u)$ 如下的无穷小生成元

$$X=\tau\frac{\partial}{\partial t}+\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial u}$$

其关于微分函数 $\tilde{G}(t,x,u,u_x,u_t,u_{xx})$ 的延拓形式为

$$X=\tau\frac{\partial}{\partial t}+\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial u}+\zeta_0\frac{\partial}{\partial u_t}+\zeta_1\frac{\partial}{\partial u_x}+\zeta_2\frac{\partial}{\partial u_{xx}}$$

这里的延拓公式为

$$\begin{aligned}\zeta_0&=D_t(\eta)-u_tD_t(\tau)-u_xD_t(\xi)\\ \zeta_1&=D_x(\eta)-u_tD_x(\tau)-u_xD_x(\xi)\\ \zeta_2&=D_x(\zeta_1)-u_{tx}D_x(\tau)-u_{xx}D_x(\xi)\end{aligned}$$

其中， D_t 和 D_x 是关于 t 和 x 的全微分。由此可写出原发展型方程的决定方程

$$\zeta_0-\frac{\partial\tilde{G}}{\partial u_{xx}}\zeta_2-\frac{\partial\tilde{G}}{\partial u_x}\zeta_1-\frac{\partial\tilde{G}}{\partial u}\eta-\frac{\partial\tilde{G}}{\partial x}\xi-\frac{\partial\tilde{G}}{\partial t}\tau=0 \tag{7}$$

其用延拓算子表达的缩写形式为 $X[u_t-\tilde{G}(t,x,u,u_x,u_{xx})]=0$ 。特别地，容易证明其无穷小对称表达式中恒有 $\tau=\tau(t)$ 。

4 原理与应用：作为群不变解的相似性解

通过无穷小生成元阐述的不变量定理是李群方法的核心所在，这一定理联系了函数形式（代数函数，微分函数）或对应方程（代数方程，微分方程）和它们的对称性，由此给出了相互求解的依据并衍生出群不变解方法和作为其特殊情形的相似性解方法[10,13]。本节将基于不变量定理给出相似性解方法可将偏微分方程化为常微分方程这一常见认识的严格形式化证明，即相似性解方法的减元定理；在此基础上，将采用决定方程和无穷小生成元的数学工具，结合几个实例展示群不变解方法求解微分方程的具体应用。

4.1 相似性解方法及其减元定理

这里仍以一阶常微分方程为例介绍微分方程的李群方法[10]，这类方法通过求解无穷小生成元对应的决定方程实现对微分函数形式的间接简化（减元或降阶），从而有利于进一步求得非线性微分方程的通解。第一步是类似的，即先通过延

拓后的不变量定理式 (6) 求出微分方程的无穷小对称 $X=\xi(x,y)\partial/\partial x+\eta(x,y)\partial/\partial y$ 。第二步有 3 种方法，一是最基本的群不变解法，由满足决定方程的不变量函数 $u_1(x,y),\ u_2(x,y)$ 构造不变曲线 $u_1=\varPhi(u_2)$ ，然后代入微分方程使其减元，这样求得的解称为群不变解；二是正则变量法，分别求解无穷小生成元的不变量 $X(u(x,y))=0$ 和正则变量 $X(t(x,y))=1$ ，将求得的 $t(x,y)$, $u(x,y)$ 作为新的自变量和因变量即可将原方程化为可积形式；三是积分因子法，对于一阶常微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}x=0$ ，若其无穷小对称使得 $\xi M+\eta N\neq 0$ ，则 $\mu=1/(\xi M+\eta N)$ 是原方程的一个积分因子用于方程降阶，称为李积分因子。特别地，若方程存在给定的解，则该解在与方程相容的群变换后仍为原方程的解，这也构成了求解非线性微分方程的重要手段。需要指出的是，决定方程仍旧是一阶偏微分方程（组），问题并没有得到本质上的充分简化。因此，尽管上述方法给出了一个通用步骤，从求解方程这一实用的角度看，只有求解决定方程相比直接求解原方程更为容易，这种方法才是有实际意义的。

由此审视相似性解方法，可知其通过指定不变量之间的函数关系实现对方程的减元并获得所谓的自相似性解，是群不变解方法在非齐次伸缩变换群下的特殊情形 [10]。然而对于为何群不变解方法能够减少微分方程的变量数目从而使偏微分方程减元简化为常微分方程（或使常微分方程简化为代数方程），目前常见的力学和传热学教材或专著鲜有严格形式化解释，而纯数学专著通常不关注数学物理方程求解方法背后这类具体的原理性问题。下面将针对一阶偏微分方程严格证明其减元定理，这一证明过程容易推广至一般情形。

定理 (一阶偏微分方程情形下的减元定理). 设微分函数 $\tilde{F}(x,y,u,u_x,u_y)$ 具有无穷小对称性 X ， 且 X 有彼此函数无关的群不变量 $\alpha=\alpha(x,y),\mu=\mu(x,y,u)$ 。若以上述两个不变量为原微分函数的新自变量，且设 $\mu=\phi(\alpha)$ ，那么新的微分函数 $\tilde{G}$ 必定只包含这两个变量而不显含其他变量。

证明 任取函数形式 $\beta(x,y)$ ，不妨设它与 $\alpha(x,y),\mu(x,y,u)$ 彼此函数无关（否则结论已经成立），这时可作坐标变换 $(x,y,u)\mapsto(\alpha,\beta,\mu)$ ，此时微分函数 $\tilde{F}$ 变为 $\tilde{G}$ 。由坐标变换保持微分函数的对称性[10] 知 $\hat{X}\tilde{G}=X\tilde{F}=0$ 。将 $\hat{X}\tilde{G}$ 作如下展开

$$
\begin{aligned}
\hat{X}\tilde{G}=&\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\alpha}\hat{X}\alpha+\frac{\partial G}{\partial\beta}\hat{X}\beta+\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\mu}\hat{X}\mu\\
&+\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\mu_\alpha}\hat{X}\mu_\alpha+\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\mu_\beta}\hat{X}\mu_\beta
\end{aligned}
\tag{8}
$$

由不变量定理及微分函数复合保持函数形式的对称性[10] 可知

$$
\hat{X}\mu=\hat{X}\alpha=\hat{X}\mu_\alpha=0
$$

于是有

$$
\frac{\partial G}{\partial\beta}\hat{X}\beta+\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\mu_\beta}\hat{X}\mu_\beta=0 \tag{9}
$$

如果成立 $\partial G/\partial\beta=\mu_\beta=0$ ，那么定理 4.1 便得证。事实上，若设 $\mu=\mu(\alpha,\beta)$ ，则由 $\hat{X}\mu=\mu_\alpha\hat{X}\alpha+\mu_\beta\hat{X}\beta$ 可知 $\mu_\beta\hat{X}\beta=0$ 。我们断言 $\hat{X}\beta\neq 0$ ；否则根据偏微分方程理论，由于 X 已然拥有彼此函数无关的首次积分 $\alpha(x,y),\mu(x,y,u)$ ，因此 $\beta(x,y)$ 如果是 X 的群不变量亦即它的首次积分，必定与 $\alpha(x,y),\mu(x,y,u)$ 彼此函数相关，这与前面所做的“ $\beta(x,y)$ 与 $\alpha(x,y),\mu(x,y,u)$ 彼此函数无关”的假设相互矛盾。于是有 $\hat{X}\beta\neq 0$ 进而 $\mu_\beta=0$ ，再代入式 (9) 即得 $\partial G/\partial\beta=0$ 。这样就完成了证明。

更一般地，当微分方程具有两种及以上的对称性，则可以构造变换群之间的某种运算，从而建立起一定的代数结构并设法确定出其标准形式，从而将问题化归到对应的正则坐标系进行求解。满足上述要求的一种重要的代数就是李代数，它与微分算子的换位运算密切相关，体现了无穷小生成元族 $\{X_i\}$ 所张成线性空间的内部结构。实际上，上述减元定理在微分方程具有可解李代数条件下可以作为其自然推论[10-13]。由于篇幅所限，不在这里予以展开。

4.2　案例讨论 1: Riccati 方程

这里以 Riccati 方程为例讨论非线性常微分方程的李群解法，本例部分参考了李群方法的专著[10]。考虑如下常系数 Riccati 方程

$$
y'+y^2-\frac{2}{x^2}=0
$$

首先寻求原方程的无穷小对称性，这里依次采用基于定义和不变量定理两种方法。一方面（采用定义），考虑到方程左侧是有理函数，可考虑伸缩变换 $\bar{x}=kx$ ， $\bar{y}=ly$ ，令

$$\bar{y}'+\bar{y}^2-\frac{2}{\bar{x}^2}=\frac{l}{k}y'+l^2y^2-\frac{1}{k^2}\frac{2}{x^2}\equiv \lambda\cdot\left(y'+y^2-\frac{2}{x^2}\right)$$

由此可求得 $k=1/l=:\mathrm{e}^a$ ，即其非齐次伸缩变换群为 $\bar{x}=x\mathrm{e}^a$ ， $\bar{y}=y\mathrm{e}^{-a}$ ，其无穷小对称为 $X=x\partial/\partial x-y\partial/\partial y$ 。另一方面（采用不变量定理），将原式左侧的微分函数代入决定方程 (6)，有

$$\xi\left(-\frac{4}{x^3}\right)+\eta\left(-2y\right)=\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)\cdot\left(\frac{2}{x^2}-y^2\right)-\xi_y\left(\frac{2}{x^2}-y^2\right)^2$$

该方程应当在变量 x,y 下同时成立，易求得 $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ 的低阶多项式解 $\xi=x$, $\eta=-y$ ，这对应同一个无穷小对称 $X=x\partial/\partial x-y\partial/\partial y$ 。

下面基于上述无穷小生成元，依次应用正则变量法和积分因子法求解原方程。对于正则变量法，需首先寻求 $t(x,y)$, $u(x,y)$ 使得 $X(t)=1$, $X(u)=0$ 。易求得前者的一个特解为 $t=\ln|x|$ ，后者采用积分因子法有 $u=xy$ 。由此可将原方程化为可积形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-(u^2-u-2)\Rightarrow u=\frac{C+2\mathrm{e}^{3t}}{\mathrm{e}^{3t}-C}\ \text{或}\ u=-1\Leftrightarrow y=\frac{2x^3+C}{x(x^3-C)}\ \text{or}\ y=-\frac{1}{x}$$

对于积分因子法，将方程写为微分形式 $\mathrm{d}y+\left(y^2-2/x^2\right)\mathrm{d}x=0$ ，由此结合无穷小生成元可写出该方程的李积分因子

$$\mu=\frac{x}{x^2y^2-xy-2}\Rightarrow\frac{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}{x^2y^2-xy-2}+\frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}\ln\frac{xy-2}{xy+1}+\ln x\right)=0$$

进而解得 $(xy-2)/(xy+1)=C/x^3$ ，其中 $C\neq 0$ 。

4.3 案例讨论 2: Burgers 方程与线性扩散方程

这里以 Burgers 方程为例讨论非线性偏微分方程的李群解法，并简要讨论作为其退化形式的线性扩散方程。写 Burgers 方程 $\tilde{u}_t+\tilde{u}\tilde{u}_x=\tilde{u}_{xx}$ ，令 $u=-\tilde{u}$ ，则 $u_t=u_{xx}+uu_x$ 。下面寻求该方程如下形式的无穷小生成元

$$X=\tau(t)\frac{\partial}{\partial t}+\xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

其决定方程 (7) 可写为 $\zeta_0-\zeta_2-u\zeta_1-\eta u_x=0$ 。代入 $u_t=u_{xx}+uu_x$ ，令 u_{xx} 的系数为 0，有

$$2\xi_u u_x+2\xi_x-\tau'(t)=0\Rightarrow\xi_u=0,\ 2\xi_x-\tau'(t)=0$$

代入决定方程，有

$$u_x^2\eta_{uu}+\left(\frac{1}{2}\tau'(t)u+\frac{1}{2}\tau''(t)x+p'(t)+2\eta_{xu}+\eta\right)\cdot u_x+u\eta_x+\eta_{xx}-\eta_t=0$$

令 u_x^2, u_x^1, u_x^0 的系数为 0，可解出

$$\begin{aligned}\tau&=C_1+2C_4t+C_5t^2\\ \xi&=C_2+C_3t+C_4x+C_5tx\\ \eta&=C_3-C_4u-C_5(x+tu)\end{aligned}$$

由此可写出其 5 个任意常数对应的无穷小生成元[10]

$$\begin{aligned}&X_1=\frac{\partial}{\partial t},\ X_2=\frac{\partial}{\partial x},\ X_3=t\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}\\ &X_4=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-u\frac{\partial}{\partial u}\\ &X_5=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx\frac{\partial}{\partial x}-(x+tu)\frac{\partial}{\partial u}\end{aligned}$$

这里， X_1 是时间变换群， X_2 是空间变换群， X_3 是时空伸缩变换群， X_4 是伽利略变换群， X_5 是射影群。

下面以伸缩变换群 X_4 为例利用群不变解方法求其不变解，此时称为物理相似解。由其特征方程可求出对应的不变量

$$\frac{\mathrm{d}t}{2t}=\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mathrm{d}u}{u}\Rightarrow\lambda=\frac{x}{\sqrt{t}},\ \mu=\sqrt{t}u$$

由此设不变解的形式为 $u=\varPhi(\lambda)/\sqrt{t}$ ，可得其相似解的方程

$$\varPhi''+\varPhi\varPhi'+\frac{1}{2}(\lambda\varPhi'+\varPhi)=0$$

可求得其一个特解为（其中 B 为任意常数）

$$u=\frac{2}{\sqrt{\pi t}}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/(4t)}}{B+\mathrm{erf}(x/(2\sqrt{t}))},\ \mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$$

作为 Burgers 方程的退化形式，Stokes 第一问题中的线性扩散方程的无穷小生成元可类似求得

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\ X_2=\frac{\partial}{\partial x}$$
$$X_3=2t\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial x},X_4=u\frac{\partial}{\partial u}$$
$$X_5=2t\frac{\partial}{\partial t}-xu\frac{\partial}{\partial u}$$
$$X_6=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{4}(2t+x^2)u\frac{\partial}{\partial u}$$

这里， X_1 是时间变换群， X_2 是空间变换群， X_3 和 X_4 是伸缩变换群， X_5 是伽利略变换的热表示， X_6 是射影群。需要注意的是，该方程还存在无穷维代数 $\eta=\mu(t,x)$ ，其中 $\mu=\mu(t,x)$ 为线性扩散方程的任意解，这反映了方程的线性特征。以伽利略变换的热表示 X_5 为例利用群不变解方法求其不变解，由相应特征方程可求出对应不变量

$$\frac{\mathrm{d}x}{2t}=-\frac{\mathrm{d}u}{xu}\Rightarrow\lambda=t,\ \mu=u\mathrm{e}^{x^2/(4t)}$$

由此设不变解的形式为 $u=\phi(t)\mathrm{e}^{-x^2/(4t)}$ ，可得其相似解的方程 $\phi'(t)+\phi/(2t)=0$ ，可求得其一个特解为（其中 C 为任意常数）

$$u=\frac{C}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-x^2/(4t)}$$

5 结论与展望

本文基于教学实践中的案例，针对典型的 Stokes 第一问题，通过引入单参数群等数学概念，叙述了一般条件下相似性解不存在的原因，即边界条件与微分方程所具有的李群对称性不相容。基于无穷小生成元的不变量定理，进一步给出了相似性解方法能够使微分方程减元的严格证明，这一点现有教科书均将其看作一种数学技巧而并未予以充分关注，而这背后的李群方法实际上是求解众多非线性微分方程的利器。考虑到一般的非线性微分甚至积分动力系统均可能通过放宽物理约束和几何约束以恢复一定的对称性，本文对相似性解方法应用条件的澄清与数学原理的证明也具有更广泛的意义。笔者希望本文能够引导学生关注各类精确解和近似解方法背后的物理思想，提升其把握核心物理图像、构建合理数学语言和建模求解具体问题的能力，从而在流体力学和传热传质学等课程的教学中发挥积极作用。

参 考 文 献

1 张兆顺, 崔桂香. 流体力学. 北京: 清华大学出版社, 2015
2 朱克勤, 许春晓. 粘性流体力学. 北京: 高等教育出版社, 2009
3 张兆顺, 崔桂香, 许春晓等. 湍流理论与模拟. 北京: 清华大学出版社, 2017
4 朱克勤, 彭杰. 高等流体力学. 北京: 科学出版社, 2017
5 阿诺尔德 B И. 经典力学的数学方法. 齐民友译. 北京: 高等教育出版社, 2006
6 Bluman GW, Cole JD. Similarity Methods for Differential Equations. New York: Springer, 1974
7 谢多夫. 力学中的相似方法与量纲理论. 北京: 科学出版社, 1982
8 谈庆明. 量纲分析. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2005
9 高光发. 量纲分析理论与应用. 北京: 科学出版社, 2021
10 Ibragimov NH. 微分方程与数学物理问题. 卢琦, 杨凯, 胡享平译. 北京: 高等教育出版社, 2010
11 孙博华. 量纲分析与 Lie 群. 北京: 高等教育出版社, 2016
12 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京: 科学出版社, 1999
13 邱志平, 姜南. 力学分析中的对称性和守恒律. 北京: 科学出版社, 2023
14 梅凤翔. 关于 Lagrange 系统的 Lie 代数——分析力学札记之五. 力学与实践, 2000, 22(2): 67-69
15 赵纲领. Lie 群在离散动力系统的应用研究. [博士论文]. 上海: 上海大学, 2013
16 李亚男, 李博文, 丁洁玉等. 多体系统动力学 Lie 群微分-代数方程约束稳定方法. 动力学与控制学报, 2018, 16(2): 97-101
Li Yanan, Li Bowen, Ding Jieyu, et al. Constraints stabilization method for DAEs on Lie group of multibody system dynamics. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(2): 97-101 (in Chinese)
17 单雪雄. 量纲分析和相似解的连续群理论. 力学进展, 1982, 12(4): 365-377
18 鄢庆增. 用群论方法求粘性流动的相似性解. 力学与实践, 1991, 13(4): 63-64
19 郭凯涛, 邵雪明, 张凌新. 气泡动力学基本方程的理论解研究. 第十六届全国水动力学学术会议暨第三十二届全国水动力学研讨会, 上海，2021
20 罗绍凯. 分数阶动力学的分析力学方法及其应用. 动力学与控制学报, 2019, 17(5): 432-438
Luo Shaokai. Analytical mechanics method of fractional dynamics and its applications. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(5): 432-438 (in Chinese)
21 Yang LJ, Feng CK. A unified asymptotic theory of supersonic, transonic, and hypersonic far fields. *Axioms*, 2022, 11(1): 656

(责任编辑: 王永会)